CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE DU SERVICE DE SANTE DES ARMEES DE LOME (ESSAL) 2018

EPREUVE DE MATHS
DUREE : 4 H ; Coef. : 3

Exercice 1 (05 points)

On dispose d'un dé à six faces portant les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6.

On lance le dé une fois. k étant un entier naturel ($1 \leq k \leq 6$), P_k désigne la probabilité d'obtenir le numéro k. Ce dé est déséquilibré de façon que $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ sont, dans cet ordre , les termes consécutifs d'une suite arithmétique.

1-a/ Calculer, sous forme de fractions irréductibles, les probabilités P_1, P_2, P_3, P_4, P_6 sachant que $P_5 = \frac{7}{60}$. **(1,5 pts)**

b/ On jette ce dé trois fois de suite.

Quelle est la probabilité pour que les trois nombres obtenus soient, dans un ordre quelconque 1, 2 et 4 ? On donne une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près. **(1 pt)**

2- n étant un entier naturel non nul, on jette n fois ce dé. Soit U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le numéro 6 au n-ième lancer.

a/ Calculer U_n en fonction de n. **(0,5 pt)**

b/ Montrer que la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ est une suite géométrique convergente. **(0,75 pt)**

c/ Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. **(0,75 pt)**

d/ Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $S_{n_0} > 0{,}99$. **(0,5 pt)**

Exercice 2 (05 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, unité graphique 1 cm.

On considère les points A ; J ; C d'affixes respectives $z_A = 2 + i$; $z_J = 3 + 5i$ et $z_C = 6 + 3i$.

1- Déterminer les images des points A et C par la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. **(0,75 pt)**

2- Soient les points B et D d'affixes respectives $z_B = 1 + 2i$ et $z_D = -1 + 6i$.

a/ Montrer qu'il existe une similitude directe s telle que s(A) = B et s(C) = D. **(0,25 pt)**

b/ Montrer que cette similitude est une rotation et préciser ses éléments caractéristiques. **(0,75 pt)**

3- On appelle I le point d'affixe $z_I = 1 + i$, M et N les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].

Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère IMJN. **(0,5 pt)**

4- On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD sont des carrés directs.

a/ Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q. **(0,5 pt)**

b/ Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP})$ et $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ})$.

En déduire les éléments caractéristiques de la similitude g telle que g(A) = P et g(C) = Q. **(1,5 pts)**

c/ En déduire que J est l'image de M par g. Que peut-on en déduire pour J ? **(0,75 pt)**

Exercice 3 (05 points)

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle [0; 2] par $g(x) = (x-1)e^{x-2} + 1$.

1-a/ Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation. **(0,75 pt)**

b/ Etudier le signe de $g(x) - x$. **(0,5 pt)**

c/ Tracer la droite d'équation $y = x$ et la courbe représentative de g dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité graphique 8 cm. **(0,75 pt)**

2-a/ Interpréter géométriquement le réel $I = \int_1^2 (x - g(x))dx$. **(0,25 pt)**

b/ A l'aide d'une intégration par partie ; calculer I. **(0,5 pt)**

3- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et f_n la fonction définie sur [1, 2] par :

$f_n(x) = \frac{2(x-1)^n}{x} + 1$.

a/ On pose $I_n = \int_1^2 (x - f_n(x))dx$ et $U_n = 2\int_1^2 \frac{(x-1)^n}{x} dx$.

Prouver que $I_n = \frac{1}{2} - U_n$. **(0,5 pt)**

b/ Etudier le sens de variation de la suite (U_n). **(0,5 pt)**

c/ Prouver que pour tout réel x appartenant à [1 ; 2], $0 \leq \frac{(x-1)^n}{x} \leq (x-1)^n$. **(0,5 pt)**

d/ En déduire que pour tout entier naturel n, $n \geq 2$ et $0 \leq U_n \leq \frac{2}{n+1}$. **(0,5 pt)**

e/ Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini. **(0,25 pt)**

Exercice 4 (05 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on donne la suite des points $(M_n)_{n\geq 0}$ d'affixes (z_n) tels que pour tout entier naturel n, $z_{n+2} = 2az_{n+1} - a^2 z_n$ où a est un réel donné différent de 1.

1- Soit α_{n+1} l'affixe du point G_{n+1} tel que $\alpha_{n+1} = \frac{z_{n+1} - az_n}{a-1}$.

a/ Vérifier que O, G_{n+1} et G_{n+2} sont alignés. **(0,5 pt)**

b/ Comment G_{n+1} se déduit-il simplement de G_n ? **(0,25 pt)**

Dans la suite de l'exercice, on suppose $a = \frac{1}{2}$ et que M_0 et M_1 ont pour affixes respectives 2 et 1+ i.

2- Placer sur un graphique les points M_0, M_1, G_1 et expliquer la construction pour laquelle chacun des points G_2 et M_2 se déduit des précédents. **(1 pt)**

3- On note $x_n + iy_n$ l'affixe du point M_n.

a/ Etablir une relation entre x_{n+2}, x_{n+1}, x_n. **(0,25 pt)**

b/ On considère les suites de terme général :

$U_n = 2^n x_n$ et $V_n = 2^n y_n$

Montrer que les suites $W_n = U_{n+1} - U_n$ et $t_n = V_{n+1} - V_n$ sont constantes. En déduire l'expression de U_n et de V_n en fonction de n. **(2 pts)**

c/ Déterminer l'expression de x_n puis de y_n en fonction de n. **(0,5 pt)**

d/ Comment se comporte le point M_n lorsque n tend vers $+\infty$. **(0,5 pt)**