Problèmes (11 points)

Partie A

La fonction g est définie sur IR par $g(x) = 2e^{x-1} + 2x - 9$.

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 pt)
2. Etudier le sens de variation de la fonction g sur IR et dresser son tableau de variation. (1 pt)
3. Justifier que l'équation g(x) = 0 admet dans IR une solution unique α telle que $1{,}94 < \alpha < 1{,}941$. (1 pt)
4. Etudier le signe de g sur IR. (0,5 pt)

Partie B.

La fonction f est définie sur IR par $f(x) = (2x - 7)(1 - e^{1-x})$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, $\vec{i}, \vec{j}$) d'unité graphique 2 cm.

1. Etudier le signe de f sur IR. (0,5 pt)
2. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 pt)
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f et vérifier que $f'(x)$ et g(x) ont le même signe. Dresser le tableau de variation de f. (1 pt)
4. a/ Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha - 7)^2}{2\alpha - 9}$. (0,5 pt)

   b/ Etudier le sens de variation de la fonction

$$h : x \mapsto \frac{(2x-7)^2}{2x-9} \text{ sur l'intervalle } \left]-\infty; \frac{7}{2}\right[$$

   . En déduire à partir de l'encadrement de α obtenu dans la partie A, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$. (1,25 pts)
5. Démontrer que la droite (D), d'équation y = 2x–7 est asymptote à (C) à $+\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à (D). (0,5 pt)
6. Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le même repère(O, $\vec{i}, \vec{j}$). (1,25 pts)

Partie C

A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire A de la portion du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \dfrac{7}{2}$.

(1 pt)

Partie D

Pour tout entier naturel n supérieur à 3, on considère les points A_n, B_n, et C_n, d'abscisse n, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite (D) et à la courbe (C).

Soit U_n le réel défini par

$$U_n = \frac{C_nB_n}{A_nB_n}.$$

1. Démonter que pour tout entier naturel n supérieur à 3, on a $U_n = \dfrac{2n - 7 - f(n)}{2n - 7}$. (0,5 pt)
2. a/ Quelle est la nature de la suite (U_n) ? (0,5 pt)

   b/ Calculer la limite de la suite (U_n) . Pouvait-on prévoir ce résultat ? (0,5 pt)